

Dimensionamiento de pilares de alta resistencia en una mina subterránea mediante métodos numéricos

Maria I. MARTINEZ L.^{a,1}, Gian NAPA G.^b, Christ J. BARRIGA P.^c,

Raquel QUADROS V.^d y Romero CÉSAR G.^e

^a*Núcleo de Geotecnia da Escola de Minas, UFOP, marialopez@aluno.ufop.edu.br*

^b*Instituto Tecnológico Vale, Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil, gian.garcia@itv.org*

^c*Núcleo de Geotecnia da Escola de Minas, UFOP, cjbarriga_87@hotmail.com*

^d*Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, raquelveloso@puc-rio.br*

^e*Núcleo de Geotecnia da Escola de Minas, UFOP, romero@em.ufop.br*

Resumen. Este artículo tiene por objetivo contribuir a la optimización de la forma de pilares mediante un caso teórico de una Mina de Manganeso respetando los requerimientos de seguridad en obras subterráneas. El estudio se realizó a través de una comparación entre dos métodos: formulaciones empíricas reconocidas y destacadas en la literatura y, simulación numérica usando el programa FLAC 3D, cuya ejecución es mediante el Método de Diferencias Finitas (MDF). Para el modelo se aplicó el concepto "Relación Tensión/Resistencia (RTR)" utilizando el criterio de falla que Hoek & Brown modificado, el cual requiere parámetros de entrada muy robustos; Debido a una insuficiencia de datos de caracterización inadecuados y de tensiones *in situ*, algunas aproximaciones y estimativas fueron realizadas basadas en el estado del arte en casos similares. Los resultados obtenidos indican que, a partir de los parámetros utilizados, es posible reducir la sección actual de los pilares, aumentando la recuperación hasta de 40% a más.

Palabras Clave. Simulación Numérica, Metodología Empírica, Optimización de Pilares.

1. Introducción

El diseño de pilares en minas subterráneas es realizado, generalmente, mediante una metodología simplificada, donde la estabilidad de la excavación es evaluada a través de la relación entre la resistencia del pilar, calculada por teorías empíricas [1] y la carga estática que sobre el recae determinada por el Método del área Tributaria. Esta medida de desempeño es, normalmente definida, como Factor de Seguridad (FS), y debe cumplir un valor mínimo (FS_{min}) preestablecido.

Fundamentado en la necesidad de un análisis menos conservador y más realista en el proceso de cálculo de resistencia y de coeficientes de Seguridad (FS) en pilares en roca dura, fueron utilizadas simulaciones numéricas como una metodología alternativa

¹ Martínez López, Maria Isabel, Estudiante del Núcleo de Geotecnia da Escola de Minas - NUGEO, Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP, Campus Universitário Morro do Cruzeiro, S/N | Ouro Preto/Minas Gerais - 35.400-000, Brasil; E-mail: marialopez@aluno.ufop.edu.br

para el planeamiento minero en Brasil. El trabajo desarrollado presenta la comparación entre los métodos empíricos y numéricos para un caso teórico, demostrando diferencias entre cada método y el aumento representativo en el FS mediante la segunda metodología utilizada, con la finalidad de determinar el área transversal ideal para los pilares, de tal manera que se garantice de manera segura la máxima extracción del mineral.

2. Diseño de Pilares en roca

En el proceso de excavación en minas subterráneas utilizando el método de cámaras y pilares, el principal objetivo es determinar las dimensiones mínimas de los pilares, para recuperar la máxima cantidad de mineral.

Este procedimiento está basado en el cálculo de dos parámetros: la resistencia del pilar (σ_p) y la tensión vertical (S_v) que actúa sobre él.

El concepto de Factor de Seguridad considera que, entre mayor sea este coeficiente ($FS > 1$), mayor será la estabilidad del pilar, sin embargo, al obtener bajos valores ($FS < 1$) la premisa es que exista grande riesgo de colapso en la estructura. De esta manera, según Brady Brown [1993] el Factor de Seguridad puede ser definido como:

$$FS = \frac{\sigma_{Admisible}}{\sigma_{Aplicada}} = \frac{\sigma_p}{S_v} \quad (1)$$

La relación representada en la Ec (1) permite evaluar cuantitativamente las dimensiones del pilar, siendo éste el propósito principal de este trabajo.

2.1. Método Empírico

- Determinación de la Resistencia Axial del pilar

Los métodos empíricos se fundamentan en casos de ruptura de pilares de carbón entre los años 1960 y 1980 en minas subterráneas de Norteamérica y Sudáfrica [2]. Sin embargo, el diseño de pilares de roca dura ("hard rock") es un tema limitado comparado con la literatura técnica disponible para pilares de baja resistencia, cuyo procedimiento no considera ninguna distribución de esfuerzos en torno a la excavación minera.

El cálculo estimado de la resistencia axial del pilar atiende tres parámetros esenciales, el ancho del pilar (w_p), la altura del pilar (h_p) y la resistencia mecánica del macizo rocoso que constituye el pilar (σ_m), descrita a continuación:

$$\sigma_p = \sigma_m \frac{W_p^a}{h_p^b} \quad (2)$$

En la actualidad, diversos métodos empíricos para la resistencia de pilares han sido propuestos considerando, apenas aspectos geométricos [3,4] o el efecto de confinamiento [5]. Autores como Hedley & Grant [6] y Krauland [7] afirman que la Ec (7) puede ser ajustada para estimar la resistencia en pilares de roca dura, sin embargo es necesario

modificar los coeficientes. Martínez [8] compendia los coeficientes más comunes y usados por diferentes investigadores en el tema.

Lunder & Pakalnis [9] propusieron una relación para el cálculo de la resistencia de pilares tipo barrera (Ec 3.) obtenida, a partir de 178 casos de pilares fallados en roca dura y competente.

$$\sigma_p = (k' \times \sigma_c) \times (c_1 + c_2 \times k'appa) \tag{3}$$

La Ec (3) muestra que la expresión empírica propuesta por estos autores tiene como objetivo cuantificar los efectos del confinamiento referentes a la esbeltez del pilar, que es representado en la Ec (4) por el índice de esbeltez k' , dado por:

$$k' = \tan \left[\cos^{-1} \left(\frac{1 - C_{pav}}{1 + C_{pav}} \right) \right] \tag{4}$$

siendo la variable C_{pav} definida como el “confinamiento medio del pilar” presentado en la Ec (5). Tal parámetro es dado a partir de la relación de tensión principal máxima y mínima justo en la mitad del pilar y puede ser calculado por la Ec (5).

$$C_{pav} = 0.46 \times \left[\log \left(\frac{w_p}{h_p} + 0.75 \right) \right]^{1.4}_{w_p/h_p} \tag{5}$$

Los resultados obtenidos por este método generalmente entregaron valores más realistas, debido al enfoque dados por los autores, de esta manera ha sido considerado como un método empírico para aplicar en el desarrollo de esta investigación.

- Determinación del esfuerzo vertical promedio

El método del área tributaria (MAT) utiliza un enfoque simplificado para determinar la tensión sobre los pilares. Esta teoría considera apenas una carga uniaxial, es decir, que a tensión sobre el pilar está en función tanto de la columna vertical de la roca que está inmediatamente encima del pilar, como del área libre entre el pilar y cada uno de los pilares adyacentes.

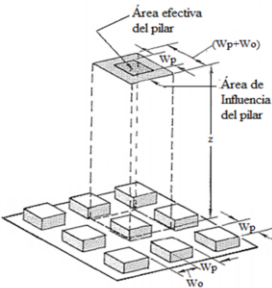


Figura 1. Esquema típico del método de cámaras y pilares. Modificado de Brady & Brown.

De acuerdo con Hoek & Brown [10] si el pilar hace parte de un conjunto de pilares y la carga de la roca es uniformemente distribuida sobre ellos, entonces la tensión media puede ser dada por la Ec (6).

$$S_v = \sigma_z * \left(1 + \frac{W_o}{W_p}\right)^2 = \gamma * z \left(1 + \frac{W_o}{W_p}\right)^2 \quad (6)$$

donde w_o es el ancho de la excavación y w_p es el ancho de los pilares. La razón de extracción, e , del mineral puede ser expresada en términos de las dimensiones de la geometría de las cámaras y pilares, de la siguiente manera:

$$e = 1 - \frac{W_p^2}{(W_p + W_o)^2} \quad (7)$$

Sin embargo, Wagner [11] demuestra que la distribución de las tensiones en un pilar es muy variable, y proporcional tanto a la resistencia como al grado de comprometimiento del pilar. En la Figura 2. Se observa como la concentración de las tensiones en el centro del pilar aumenta en la medida en que la capacidad de carga de los bordes disminuye. No obstante, los autores Obert e Duvall [5] consideran que en términos de seguridad los valores calculados por el Método del Área Tributaria (MAT) son más conservadores.

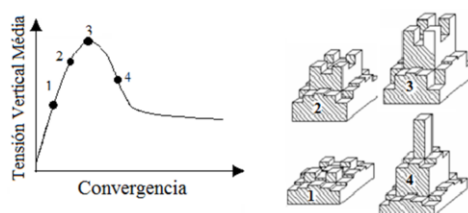


Figura 2. Distribución de tensiones en los pilares. Modificado Wagner.

2.2. Método Numérico

Este nuevo método es considerado como una alternativa innovadora, viable y práctica para el cálculo de la resistencia en pilares [12,13,14]. Una de las ventajas técnicas de esta metodología es que, dentro de sus cálculos considera complejas geometrías, planos de discontinuidades, tensiones “in situ” e inducidas, incluso propiedades del macizo rocoso adyacente que otros métodos convencionales no consideran [15,16].

- Relación de Tensión-Resistencia (RTR)

Este método creado en los años ochenta por Hoek & Brown [17] fue considerado como un proceso alternativo para evaluar la estabilidad de un pilar, y definido como una correlación entre la resistencia intrínseca del pilar con el campo de tensiones inducidas en su entorno.

En la actualidad la aplicación de la RTR fue adaptada en la mecánica del medio continuo para estimar el factor de Seguridad de pilares mediante isolíneas en una sección transversal de un modelo elástico, por lo tanto, en un espacio de tensiones ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$), la RTR es la relación entre el máximo desviador disponible en un plano octaédrico correspondiente al estado actual de las tensiones del elemento, y el desviador actuante.

Al asumir esta hipótesis, los autores sugieren que, la ruptura global de un pilar será posible únicamente cuando el valor de la RTR en el centro del pilar sea igual o menor a uno (1.0). No obstante, si el valor del RTR en el núcleo del pilar es muy alto y en los bordes muy bajo, siendo el promedio en la sección un valor próximo a uno (1.0) existe inestabilidad parcial, lo que indica que inicia una transferencia de carga de los bordes para el centro del pilar. Los autores afirman que el FS corresponde al promedio de la RTR.

El proceso de cálculo de la RTR aplicado en el software FLAC3D establece que cualquier material que esté sometido a un estado de tensiones (σ_1 y σ_3), puede ser representado como un círculo “a”, con radio “ r_a ”, dentro de una envolvente de ruptura de Hoek & Brown. Siendo que la ruptura ocurre cuando el círculo llega a tocar la envolvente de ruptura, como se observa en la Figura 3. La resistencia para el estado de tensiones representado por el círculo “a” es determinado manteniendo constante (σ_3) a medida que aumenta o disminuye σ_1 hasta que el círculo “b” con radio “ r_b ” toque la envolvente de ruptura. La relación entre los radios de los dos círculos ($F=r_b/r_a$) es considerado como la Relación Resistencia – Tensión, el cual puede ser análogo a un “índice de falla” o Factor de Seguridad (FS).

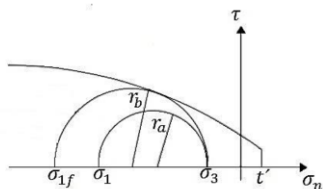


Figura 3. Relación de Resistencia – Tensión.

Las siguientes ecuaciones expresan el raciocinio matemático utilizado por el software FLAC3D para el cálculo de la Relación Resistencia–Tensión usando el criterio de Ruptura de Hoek & Brown:

$$\sigma_{1f} = \left(\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right) \sigma_3 + 2C \sqrt{\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}} \quad (8)$$

$$\sigma_{1f} = \sigma_3 - \sqrt{-m\sigma_c\sigma_3 + S\sigma_c^2} \quad (9)$$

$$FS = \frac{r_b}{r_a} = \frac{\sigma_3 - \sigma_{1f}}{\sigma_3 - \sigma_1} \quad (10)$$

3. Condiciones Generales

Al realizar una inspección del estado del arte de la metodología por Cámaras y Pilares en Brasil, se puede establecer que los depósitos de Manganeso están constituidos dentro de estructuras sedimentarias, y generalmente distribuidos en una serie de estratos subhorizontales de bajo espesor (máximo 5.0 metros) y profundidades que varían entre 100 a 300 metros.

Basados en dichos resultados fue considerado para el desarrollo de esta investigación, una veta de mineral de 3.5 m de altura, a una profundidad de 270.0 metros en relación a la superficie. El aspecto litológico en resumen, se divide en tres partes, definidas de la siguiente manera:

- La base o caja piso, constituida por conglomerados y arcoso enriquecido por hematita, mezclado con guijarros de composición granítica.
- Seguido por veta de Manganeso, expuesta en todos los niveles y caracterizada por un bandeo secuencial generando una fina laminación.
- Finalmente, Roca Superior o Caja Techo, compuesta por una roca Jaspelita o vulcanoquímicas finamente estratificadas con presencia de silicatos de hierro.

Es importante mencionar que, para el presente artículo no fue incluido ningún sistema de discontinuidades, a pesar de ser un condicional decisivo en casos de estudios reales [18,19]. Siendo que, este parámetro depende del sector de estudio e influencia significativamente los resultados, como un trabajo teórico y académico no fue llevado en consideración.

4. Simulación Numérica

Fueron definidos modelos Numéricos tridimensionales para representar los pilares, utilizando el software FLAC3D 5.0 [20].

4.1. Geometría

El cuerpo mineral excavado fue idealizado en una disposición de pilares cuadrados con secciones de 15 x 15 m y un espesor promedio de 3.5 m, así como un ancho de cámaras de 5.0 m, tal como se puede observar en la Figura 4., la cual es utilizada para el modelo numérico. De acuerdo a las condiciones anteriores y aplicando la Ec 7. se puede establecer que, para la geométrica definida, la tasa de recuperación (e) es del orden del 44.0%.

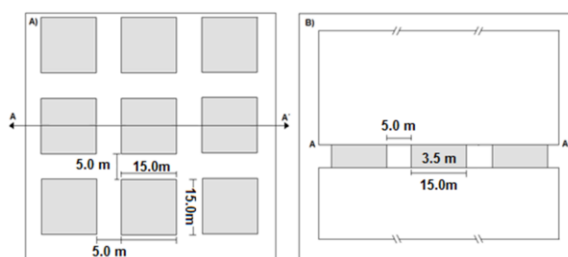


Figura 4. Dimensiones propuestas para Cámaras y Pilares. Caso teórico, a) Vista en planta del esquema del modelo y, b) Vista en perfil del esquema del modelo.

4.2. Parámetros de Entrada

La Tabla 1 expone los parámetros establecidos para cada sector del modelo geométrico propuesto, incluyendo constantes elásticas, propiedades geomecánicas, y propiedades Geomecánicas del macizo rocoso. Como se puede observar fue utilizado el GSI (Geological Strength Index) como método de clasificación del macizo rocoso, el cual permite estimar los parámetros de resistencia requeridos por el modelo, penalizando las propiedades del macizo con base en la meteorización y en la alteración de la roca.

Tabla 1. Clasificación y propiedades Geomecánicas del macizo Rocosó

	E (GPa)	μ	mi	GSI	σ_c	s	m_b	a
Techo	21.21	0.25	17.0	40.0	80.0	0.021	4.870	0.501
				65.0	30.0	0.0205	1.433	0.503
				70.0	60.0	0.0357	1.713	0.501
Pilar	12.99	0.25	5.0	80.0	90.0	0.1084	2.448	0.501
				85.0	115.0	0.1889	2.926	0.500
				65.0	80.0	0.0205	0.776	0.502
Base	21.21	0.25	2.71	65.0	80.0	0.0205	0.776	0.502

4.3. Secuencia Numérica

Fue modelado un único pilar, tal como se muestra en la Figura 5. La altura del pilar fue definida en 3.5 m, y la secuencia numérica fue realizada por etapas simulando una excavación que varió entre 15.0 m a 7.0 m. Se definió una distancia libre de influencia de excavado de 30.m, y fueron seguidos los siguientes procedimientos:

- Generación y Calibración de Malla
- Selección del modelo Constitutivo
- Inclusión de las propiedades físicas y geomecánicas de los materiales, tensiones in situ y condiciones de contorno.
- Creación de las cámaras del modelo.

Con la finalidad de reducir esfuerzo computacional y tiempo de cálculo para cada modelo fue modelado un único pilar. Adicionalmente fue aplicada una carga de 7.2 MPa simulando que la veta de manganeso se encuentra a una profundidad de 270 m.

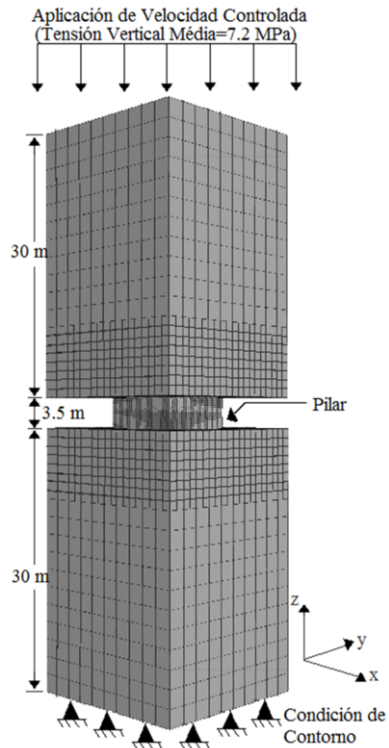


Figura 5. Modelo usado para simular un pilar en FLAC3D.

Para la calibración de la malla, el modelo fue dividido en tres partes, la parte inferior (entre 0 a 30 m), la zona intermedia referente al pilar (entre 30 a 33.5) y la superior (entre 33.5 y 63.5), todas usando una geometría tipo “brick”.

4.4. Resultados

El enfoque de este método numérico consiste en relacionar las tensiones principales de ruptura (r_b) del pilar con las tensiones al que está sometido (r_a), como ya fue expuesto en la Figura 3. Para este procedimiento fue realizado un corte transversal (corte x-x') en la mitad del pilar, donde el parámetro RTR de cada elemento es ponderado, siendo este último considerado como el valor análogo al Factor de Seguridad (FS), según la literatura.

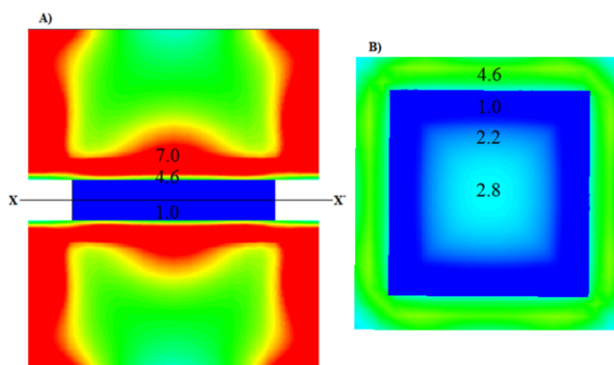


Figura 6. Resultado de la distribución del RTR en un corte vertical al pilar (a), y en un plano horizontal en la mitad del pilar (b) con un ancho de 15.0 m y un $\sigma_c=30$ MPa.

La Figura 6. representa el contorno del RTR en un pilar con un ancho de 15.0 m y bajos parámetros geomecánicos ($\sigma_c=30$ MPa) obteniendo un FS promedio de 1.87. Para este caso, puede ser considerado un pilar en condición estable. Sin embargo, el valor medio del RTR en las paredes del pilar es 1.0, definido como una zona parcialmente inestable, que genera una transferencia de carga para el núcleo, el cual consigue soportar el incremento de carga transmitido al tener un RTR de 2.8.

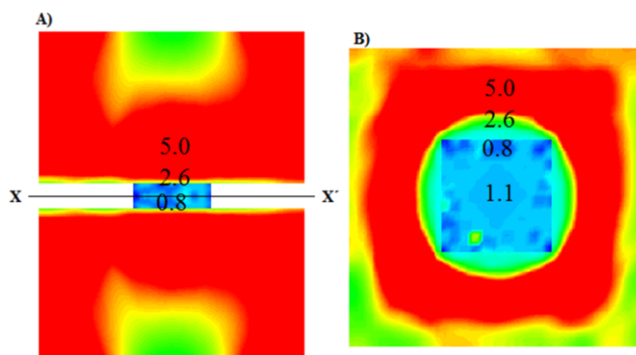


Figura 7. Resultado de la distribución del RTR en un corte vertical al pilar (a), y en un plano horizontal en la mitad del pilar (b) con un ancho de 7.0 m y un $\sigma_c=30$ MPa.

En el caso del núcleo no conseguir soportar la transferencia al tener un valor de RTR igual o menor a 1.0, este presentaría una típica ruptura global, como se observa en la Figura 7., constituyendo el escenario más crítico para el estudio realizado, con un RTR promedio de 0.95, correspondiente a un pilar de 7.0 m de lado y con una resistencia a la compresión uniaxial (σ_c) de 30 MPa para la roca intacta.

Los resultados obtenidos por esta metodología variando tanto la geometría del pilar como los parámetros de resistencia del mismo, son los siguientes.

De acuerdo a los resultados de la Tabla 2 se puede establecer un dimensionamiento máximo y mínimo en pilares, entre 14.0 a 9.0 m, según sean las propiedades geomecánicas utilizadas.

Sin embargo, la metodología RTR considera restricciones numéricas que limitan las tensiones aplicadas en la estructura, σ_1 , cuando son menores o iguales, a las tensiones máximas principales de ruptura, (definida como resistencia, para este caso); por lo que, el método condiciona a que el índice RTR tenga un valor mínimo de 1.0, teóricamente. Es importante mencionar que, los resultados de la Tabla 2 incluyen errores de truncamiento y de arredondamiento, también definidos como inestabilidades numéricas al tener una influencia notoria en la respuesta final [21].

Tabla 2. Resultado de la Relación Resistencia – Tensión (RTR).

Wp (m)	RTR promedio			
	$\sigma_p=30$	$\sigma_p=60$	$\sigma_p=90$	$\sigma_p=115$
15.0	1.87	2.44	4.13	6.58
14.0	1.50	2.22	3.64	5.96
13.0	1.17	2.19	3.37	5.42
12.0	1.06	1.76	2.68	4.31
11.0	1.00	1.48	2.25	3.64
10.0	1.00	1.23	1.63	2.88
9.0	0.99	1.05	1.29	2.42
8.0	0.97	1.00	1.05	1.32
7.0	0.95	0.99	1.00	1.00

5. Discusión de Resultados

Con el objetivo de evaluar la eficacia y eficiencia de los resultados del Factor de Seguridad (FS) mediante una estimativa numérica y empírica. Los valores calculados por la metodología empírica, siendo que, para la tensión media sobre pilares fue utilizado el Método del Área Tributaria (MAT) aplicando los conceptos definidos en la Ec (6). y en términos de resistencia las formulaciones presentes en la Ec (3).

La Figura 8 y la Figura 9 muestran los resultados de 2 curvas de seguridad para pilares cuadrados con geometría variable (entre 15.0 a 7.0) en función de la Resistencia a Compresión Simple (σ_c) de 30 a 115 MPa respectivamente, destacando el límite de la condición estable de la Metodología de Lunder & Pakalnis (FS=1.4). La tendencia de la curva por la metodología empírica expresa que los resultados del FS presentan una tendencia similar a los numéricos, solo que con un relación de valores más “conservadores”.

La grande divergencia entre los resultados de evaluación de estabilidad en pilares por simulación numérica y empírica se atribuye a que, los primeros consideran robustos parámetros de entrada, tales como Modulo de Young, cohesión, ángulo de fricción, entre otros.

A pesar de ser seleccionado el método empírico de Lunder & Pakalnis por presentar tendencias menos conservadoras, al ser comparado con el método numérico continúa subestimando la resistencia de los pilares. Estos resultados nos permiten deducir que, a pesar de ser importante el índice de confinamiento, este no satisface completamente, pues existen más parámetros que influyen en el cálculo de la resistencia y estabilidad del pilar, como las propiedades físicas y de resistencia de cada material.

Los resultados obtenidos en la simulación numérica por el método del RTR para la condición más crítica ($\sigma_c = 30$ MPa) presenta una tendencia próxima al método empírico para pilares con ancho superiores a 13.0 m, y para valores menores se nota una caída en la inclinación de la curva, volviéndose casi una línea horizontal, tal comportamiento permite limitar la fase elástica de la plástica en los pilares.

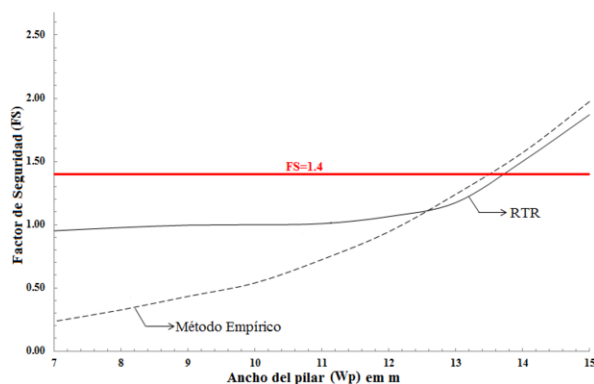


Figura 8. Gráficos de FS por enfoques diferentes para pilares con geometría variable y $\sigma_p = 30$ MPa.

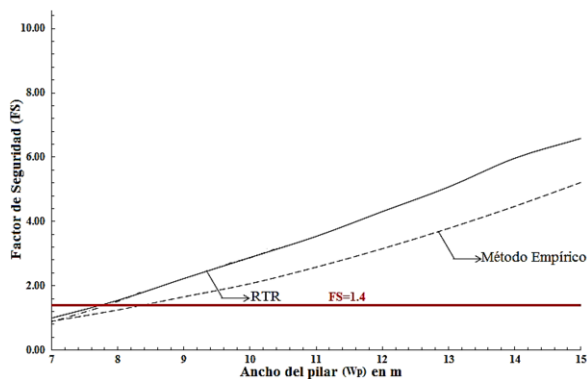


Figura 9. Gráficos de FS por enfoques diferentes para pilares con geometría variable y $\sigma_p = 115$ MPa.

En la Figura 9, aunque las fronteras entre estable e inestable no están tan pronunciadas, se puede observar la inconsistencia de la curva. Por lo tanto, el método RTR no representa una herramienta definitiva para estimar la resistencia y la estabilidad del pilar, principalmente en la proximidad con la ruptura (FS 1). Se define entonces,

como una herramienta computacional preliminar para identificar las etapas de pre y pos ruptura, igual al concepto utilizado por Freire [22].

Finalmente, al considerar las reducciones geométricas permitidas por la simulación numérica, los porcentajes de la razón de extracción del mineral aumentan, gráficamente no es significativo, pero si, en diseños de planeamiento y ejecución de obra. En ese contexto, al tornar esta variable en términos cuantitativos aplicando la Ec 7, considerando la variación geométrica y de parámetros geomecánicos se puede percibir una recuperación de mineral entre 20% a 40% más de mineral, para una sección entre 14.0 y 8.0 respectivamente.

Referencias

- [1] Brady BHG, Brown ET. Rock Mechanics: For Underground Mining. 3rd ed. London: George Allen & Unwin; 1993.
- [2] Ortiz Sánchez O, Canchari Silverio G. Analisis de variables en el diseño de pilares para sostenimiento minero subterráneo. Congr Ing Minas. 1990; 1.
- [3] Lunder PJ. Hard Rock Pillar Strength Stimulation. Vancouver, Canadá: University of British Columbia, Dissertação de Mestrado; 1994.
- [4] Sjöberg JS. Failure modes and pillar behaviour in the Zinkgruvan mine. 33th US Symp Rock Mech. 1992.
- [5] Obert L, Duvall WI. Rock Mechanics and the Design of Structures in Rock. New York: Wiley; 1967.
- [6] Hedley, D. G. F.; Grant F. Stope-and-pillar design for Elliot Lake Uranium Mines. Can Min Metall Bull. 1972;65(723):37-45.
- [7] Krauland N, Soder PE. Determining Pillar Strength from Pillar failure observation. E&MJ-Engineering Min J. 1987;188(8):34-40.
- [8] Martínez M. I. Estudo Teórico da Otimização e Estabilidade de Pilares de uma Mina Subterrânea de Manganês usando Métodos Numéricos, VII Brazilian Symposium on Rock Mechanics – SBMR 2018, Rock Engineering on Urban Development, Salvador, Bahia, Brasil, 2018.
- [9] Lunder P, Pakalnis R. Determination of the strength of hard-rock mine pillars. CIM Bull. 1997;90(1013):51-55.
- [10] Hoek E, Brown ET. Practical estimates of rock mass strength. Int J Rock Mech Min Sci. 1997;34(8):1165-1186.
- [11] Wagner H. Determination of the complete load-deformation characteristics of coal pillars. Proc Third Int Congr. 1974
- [12] Murali MG, Sheorey PR, Kushwaha A. Numerical estimation of pillar strength in coal mines. Int J Rock Mech Min Sci. 2001;38(8):1185-1192.
- [13] Li W, Bai J, Peng S, Wang X, Xu Y. Numerical Modeling for Yield Pillar Design: A Case Study. Rock Mech Rock Eng. 2015;48(1):305-318.
- [14] Von Kimmelmann, M.R.;Hyde, B.;Madgwick RJ. The use of computer applications at BCL limited in planning pillar extraction and the design of mining layouts. Des Perform Undergr Excav ISRM Symp. 1984;1:53-63.
- [15] González-Nicieza C, Álvarez-Fernández MI, Menéndez-Díaz A, Álvarez-Vigil AE. A comparative analysis of pillar design methods and its application to marble mines. Rock Mech Rock Eng. 2006;39(5):421-444.
- [16] Salazar, Eder Dianto; Córdoba DR. Geomecánica Del Minado Masivo Tajeos Por Subniveles Con Pilares Corridos. Marcapunta Norte, Perú; 208AD.
- [17] Hoek E, Brown ET. Underground Excavations in Rock. London, England: The Institution of Mining and Metallurgy; 1980.
- [18] Shonts ET, Nettleton J. Strip Mine Planning and Design. SME Min Eng Handb. 2011:1013-1026.
- [19] Martin CD, Maybee WG. The strength of hard-rock pillars. Rev Int Mecánica Rocas y Ciencias la Minería. 2000; 37(8):1239-1246.
- [20] Itasca Consulting Group Inc. Verification Problems. In: Fast Lagrangian Analysis of Continua in 3 Dimensions. Minneapolis: Minnesota; 2007:20-34.
- [21] Franco NMB. Análise de arredondamento. In: Cálculo Numérico. São Paulo: Pearson, Brasil; 2014:1-31.
- [22] Freire GR, Ashanti A, Lima DR, Ashanti A. Comparação do Método Empírico de Lunder e Pakalnis e Modelagem Numérica para Dimensionamento de Pilares na Mina. Simpósio Bras Mecânica das Rochas - SBMR. 2016:15-21, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil.